

M 10.5.2 Ausbau der Funktionenlehre

Die folgenden Aufgaben weisen ein Niveau auf, das erreicht und gehalten werden soll. Unter dem Aspekt der Differenzierung werden jedoch weitere Aufgaben, die von diesem Niveau abweichen, von den Schülern bearbeitet werden.

1. Die Skizze zeigt den Graph einer Funktion f .

a) Geben Sie einen möglichen Term der Funktion f an, der im Rahmen der Zeichengenauigkeit zum skizzierten Verlauf passt, wenn bekannt ist, dass $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ gilt.

b) Begründen Sie, dass keine der folgenden Aussagen wahr ist:

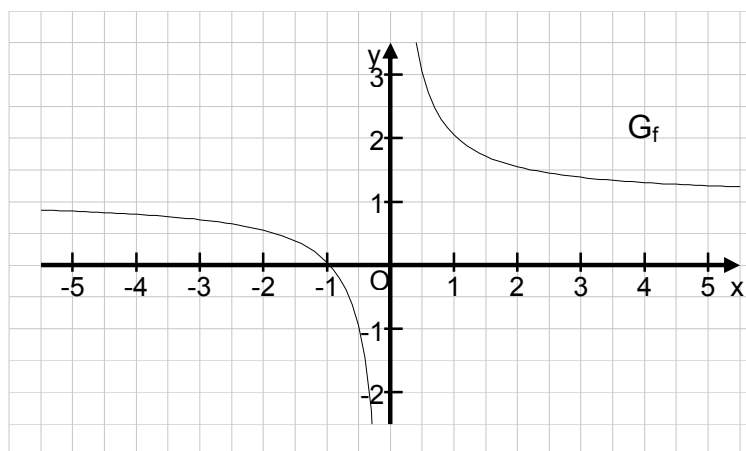
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, wenn G_f oberhalb der Geraden $y = 1$ verläuft und in $\mathbb{R}^+$ fällt.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, wenn für die Funktionswerte folgende Gesetzmäßigkeit gilt:
 $f(10) = 1,1$, $f(100) = 1,01$, $f(1000) = 1,001$, ...
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, wenn es eine Stelle x_0 gibt (z. B. $x_0 = 10$), so dass für alle $x > x_0$ der Abstand zwischen G_f und der Geraden $y = 1$ immer kleiner als $\frac{1}{100}$ ist.

*[Kommentar: Aspekte einer anschaulichen Grenzwertdefinition werden in dieser Aufgabe mit weiteren Inhalten des Lehrplankapitels M 10.5.2 verbunden, wie z. B. dem **Beschreiben des Verlaufs von Graphen unter Verwendung von Fachbegriffen.**]*

2. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ mit maximaler Definitionsmenge.

- a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge an.
- b) Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y -Achse ist.
- c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem.
- d) Für welche Werte von x unterscheiden sich die Funktionswerte der Funktion f um weniger als $\frac{1}{100}$ vom Wert 2?

*[Kommentar: Die anschauliche Entwicklung des Grenzwertbegriffs schließt die beispielhafte Bearbeitung von Aufgaben, in denen der Abstand zwischen Funktionswert und Grenzwert thematisiert wird, nicht aus. **Keinesfalls sieht der Lehrplan dabei aber ein systematisches Einüben von Betragsungleichungen vor.** Aspekte des Grenzwertbegriffs werden in dieser Aufgabe mit weiteren Inhalten des Lehrplankapitels M 10.5.2 verbunden, wie z. B. der **Wiederholung bekannter Funktionsarten und ihrer Graphen** oder **Symmetriebetrachtungen.**]*



3. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : x \mapsto f(x)$, $ID = ID_{\max}$, das Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

a) $f(x) = 2 + \frac{5}{x}$

b) $f(x) = \frac{-3x+2}{4x-5}$

c) $f(x) = 5 \cdot 2^x$

d) $f(x) = (2x+3)\cos x$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin x$

f) $f(x) = x^4 - x^3$

g) $f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+4}$

h) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

i) $f(x) = 2^{-x} \sin x$

*[Kommentar: Bei der Bestimmung des Grenzverhaltens ist an **Terme angemessener Komplexität** gedacht. Als Abkürzung sind auch die Schreibweisen*

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ zulässig.]

4. a) Geben Sie je zwei Funktionen an, bei denen für $x \rightarrow +\infty$ der Grenzwert 5 ($-0,6 ; 0$) ist. Wie verhalten sich die gewählten Funktionen für $x \rightarrow -\infty$?
- b) Geben Sie eine Funktion an, die für $x \rightarrow \pm\infty$ divergiert und nur negative Funktionswerte besitzt.

[Kommentar: Bei der Behandlung dieses Lehrplanabschnitts werden neben der Limeschreibweise auch Fachbegriffe wie „konvergent“ und „divergent“ eingeführt.]