M 9.4 Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Die Aufgaben 1 bis 5 weisen ein Niveau auf, das erreicht und gehalten werden soll. Unter dem Aspekt der Differenzierung werden jedoch weitere Aufgaben, die von diesem Niveau abweichen, von den Schülern bearbeitet werden. Beispielsweise stellt Aufgabe 6 erhöhte Anforderungen an die Kompetenzen „Mathematisch modellieren“, „Mathematisch argumentieren“ und „Mathematisch kommunizieren“.

1. Ein Würfel wird dreimal nacheinander geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint

   a) keine Sechs,

   b) genau eine Sechs,

   c) höchstens eine Sechs,

   d) mindestens eine Sechs?

   [Kommentar: Bei der Lösung der Aufgabe ist an die unmittelbare Anwendung der Pfadregeln gedacht – ggf. unter Verwendung des Gegenereignisses – und nicht an die Formeln der Binomialverteilung.]

2. Susi und Max werfen gleichzeitig je einen Stein auf eine 10 m entfernte Pfütze. Susis Treffsicherheit beträgt 40 %, die von Max 30 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft mindestens ein Stein sein Ziel?

   [Kommentar: Verwendet man das Gegenereignis, so reicht zur Lösung die Anwendung der 1. Pfadregel.]

3. Die Beliebtheit einer neuen Fernsehsendung wird untersucht. Folgende Ergebnisse der Umfrage werden veröffentlicht: 25 % der Zuschauer sind jünger als 20 Jahre; von diesen haben 70 % eine positive Meinung zur Sendung. Von den restlichen Zuschauern haben immerhin 40 % eine positive Meinung.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Zuschauer jünger als 20 Jahre und hat eine positive Meinung zur Sendung?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Zuschauer keine positive Meinung zur Sendung?

4. Ein „Teekenner“ behauptet, er könne die Teesorten First Flush (Begriff für Darjeeling- und Assam-Tees der ersten Pflückung nach dem Winter) und Second Flush (zweite Pflückung) am Geschmack unterscheiden. Er bekommt dazu einige Tassen vorgesetzt, wobei jede entweder First Flush oder Second Flush enthält. Äußerlich sind die verschiedenen Sorten nicht zu unterscheiden.

   a) Der „Teekenner“ bekommt zwei Tassen vorgesetzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit benennt er den Inhalt der beiden Tassen richtig, wenn er rät?

   

   b) Der Test wird nun so abgeändert, dass der „Teekenner“ vier Tassen vorgesetzt bekommt. Er soll jeweils den Inhalt bestimmen. Erläutere, ob ihm deiner Meinung nach das Prädikat „Teekenner“ zu Recht zusteht, wenn er den Inhalt bei

   

allen vier Tassen richtig zuordnet.
[Kommentar: Bei dieser Aufgabe wird neben dem Berechnen der Wahrscheinlichkeit $0{,}5^4$ zusätzlich eine Interpretation des Ergebnisses verlangt.]

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt der „Teekenner“ mindestens bei einer der vier Tassen daneben, falls er eine Treffsicherheit von 70 % hat?

[Kommentar: Bei der Lösung der Aufgabe ist an die unmittelbare Anwendung der Pfadregeln gedacht – ggf. unter Verwendung des Gegenereignisses – und nicht an die Formeln der Binomialverteilung.]

5. In den Spielregeln für ein Würfelspiel steht: „Man werfe beide Würfel und bilde aus den beiden oben liegenden Augenzahlen die größtmögliche Zahl.“ (Beispiel: Bei den Augenzahlen „1“ und „5“ ist das die Zahl „51“.)

a) Gib einen Ergebnisraum für dieses Spiel an.

b) Gib folgende Ereignisse in Mengenschreibweise an und bestimme jeweils ihre Wahrscheinlichkeit:

A: Die gebildete Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern.
B: Die Zahl enthält mindestens eine 4.
C: Die Einerziffer ist halb so groß wie die Zehnerziffer.
E: Die Quersumme der Zahl ist 6.
D: Die Zahl ist größer als 10.
F: Die Zahl ist eine Primzahl.

[Kommentar: Bei dieser Aufgabe bietet es sich an, neben einer Lösung mit Hilfe der Pfadregeln auch die Lösungsmöglichkeit über Laplace-Wahrscheinlichkeiten (vgl. Jgst. 8) aufzuzeigen.]

6. In einer Urne sind eine schwarze und drei weiße Kugeln; in einer anderen zwei schwarze und zwei weiße Kugeln. Ein Münzwurf entscheidet darüber, aus welcher der beiden Urnen eine Kugel gezogen werden muss. Ist die gezogene Kugel schwarz, so erhält man einen Gewinn.

a) Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?

b) Nun erhält man die Erlaubnis, die 8 Kugeln vor Spielbeginn so auf die zwei Urnen zu verteilen, dass in jeder 4 Kugeln sind – für die Aufteilung der Farben gibt es dabei keinerlei Einschränkungen. Anschließend entscheidet wieder ein Münzwurf darüber, aus welcher Urne eine Kugel gezogen werden muss. Ist sie schwarz, so gewinnt man. Gibt es unter diesen Bedingungen eine optimale Verteilung der Kugeln auf die Urnen, so dass die Gewinnwahrscheinlichkeit möglichst groß wird? Begründe.
[Kommentar: Zur Lösung von Teilaufgabe 6b können die möglichen Verteilungen systematisch überprüft werden oder man argumentiert mit Hilfe von Termen. Unter den vorgegebenen Bedingungen zeichnet sich keine Verteilung aus.]

c) Nun erhält man die Erlaubnis, die 8 Kugeln vor Spielbeginn nach Belieben auf die zwei Urnen zu verteilen. Anschließend entscheidet wieder ein Münzwurf darüber, aus welcher Urne eine Kugel gezogen werden muss. Ist sie schwarz, so gewinnt man. Wie sieht die optimale Verteilung der Kugeln auf die Urnen aus?
[Kommentar: Bei Teilaufgabe 6c kann systematisch probiert werden, um die

günstigste Verteilung zu erhalten: In einer Urne ist genau eine schwarze Kugel, alle sieben übrigen Kugeln sind in der anderen Urne. Die formale Darstellung der Begründung ist für Schüler sicherlich anspruchsvoll, die Anzahl der zu unterscheidenden Fälle bleibt aber überschaubar.]