Unterrichtsskizze zur Abhängigkeit der Schwingungsdauer von Kapazität und Induktivität – eine Herleitung der Thomson-Gleichung ohne Differentialgleichung

Allgemeine Bemerkungen:
Im Folgenden wird ein möglicher Weg zur Herleitung der Thomson-Gleichung skizziert. Diese wird dabei teilweise durch Deduktion gewonnen ohne dass näher auf Differentialgleichungen eingegangen werden muss. Somit kann an dieser Stelle des Lehrplans eine wichtige Erkenntnismethode der Physik ohne großen mathematischen Aufwand exemplarisch besprochen werden – falls die Lehrkraft dies für sinnvoll hält. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der hier vorgestellte Weg nur eine von vielen Möglichkeiten darstellt den Lehrplan zu erfüllen. So ist es beispielsweise auch völlig ausreichend, die Thomson-Gleichung nur mitzuteilen und anschließend experimentell zu bestätigen.

Vorwissen der Schülerinnen und Schüler:
Die Schülerinnen und Schüler verglichen bereits den elektromagnetischen Schwingkreis mit einem Federpendel und wissen daher, dass bei einer ungedämpften Schwingung der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung durch eine Kosinus- bzw. Sinusfunktion beschrieben wird. Um der Deduktion folgen zu können müssen den Schülerinnen und Schülern die erste Ableitung der trigonometrischen Funktionen und die Kettenregel geläufig sein.

Herleitung:
Für die Herleitung der Thomson-Gleichung sollen folgende Voraussetzungen gelten:

- Im elektromagnetischen Schwingkreis findet eine <u>ungedämpfte</u> Schwingung statt. Damit gilt der Energieerhaltungssatz.
- Die Kondensatorspannung hat einen kosinusförmigen Verlauf $U_C(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$.

Dann folgt:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$$

wobei U_0 die am Kondensator anliegende Maximalspannung und I_0 die im Schwingkreis auftretende Maximalstromstärke ist.

Für die Ladung des Kondensators gilt $Q(t) = C \cdot U_C(t)$, für die Stromstärke folgt wegen $I(t) = \dot{Q}(t)$ daher $I(t) = C \cdot \dot{U}_C(t)$.

Durch Ableiten von $U_C(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ und Einsetzen in die letzte Gleichung folgt $I(t) = -C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$.

Daraus wird ersichtlich dass $I_0 = C \cdot U_0 \cdot \omega$ gelten muss.
Dies wird in (1) eingesetzt:

$$\frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}L(CU_0\omega)^2 \text{, also}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Bemerkungen:

- Die in der Physik übliche Punktschreibweise für Ableitungen nach der Zeit sollten die Schülerinnen und Schüler bereits von der differentiellen Form des allgemeinen Induktionsgesetzes kennen.
- Obige Herleitung gilt nur für ungedämpfte elektromagnetische Schwingungen. Bei einer gedämpften Schwingung erhält man durch Lösen der entsprechenden Differentialgleichung $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$.
- Es ist nicht nötig mit dem allgemeinen Ansatz für die Kondensatorspannung $U_C(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ zu arbeiten.
- Nach der Herleitung der Thomson-Gleichung sollte eine experimentelle Bestätigung erfolgen.