Lehrplananbindung: 10.2 Die Mechanik Newtons – Die Methode der kleinen Schritte

Unterrichtskonzept „Das Verfahren der kleinen Schritte"

Anhand eines typischen Beispiels aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler wird die Methode der kleinen Schritte entwickelt, die sich nicht nur auf mechanische Probleme, sondern beispielsweise auch auf den Stromfluss durch eine Induktivität (Physik 11), das Lade- und Entladeverhalten von Kondensatoren (Lehrplan Biophysik) und viele weitere Probleme anwenden lässt, die in der Physik durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden.

Der freie Fall mit Luftwiderstand als Anwendungsbeispiel

Aus Ihrer eigenen Erfahrung wissen die Schülerinnen und Schüler, dass der freie Fall unter Vernachlässigung des Luftwiderstands eine Idealisierung darstellt und beispielsweise beim Fall einer Daunenfeder zu völlig falschen Ergebnissen führt. Möchte man diese Bewegung exakt beschreiben, ist es notwendig vom Modell einer konstanten Kraft abzurücken, der Luftwiderstand muss berücksichtigt werden.

Es ist naheliegend, dass der Luftwiderstand mit steigender Geschwindigkeit zunimmt (der Fahrtwind bremst bei geringen Geschwindigkeiten kaum, bei hohen stellt er die dominierende Bremswirkung dar). Dass der Zusammenhang zwischen Kraft und Geschwindigkeit quadratisch ist, muss den Schülerinnen und Schülern mitgeteilt werden.

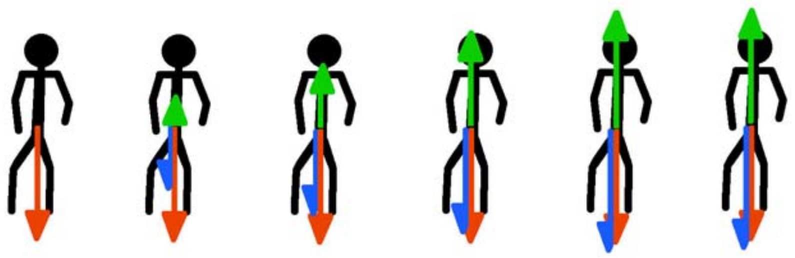
Eine besonders anschauliche Bewegung, die vielen Schülerinnen und Schülern geläufig ist, ist die Bewegung eines Fallschirmspringers im freien Fall, wobei angenommen wird, dass dieser senkrecht, beispielsweise aus einem Hubschrauber springt. In diesem Fall wirken auf den Fallschirmspringer die konstante Gewichtskraft und die durch den Luftwiderstand geschwindigkeitsabhängige Kraft

$$F_g = m\,g \qquad\qquad F_r = k \cdot v^2 \text{ mit } k = 0{,}3\ \mathrm{N\,s^2\,m^{-2}} = 0{,}3\ \mathrm{kg\,m^{-1}}$$

Diese Werte liefern bei einer Masse von 90 kg eine Maximalgeschwindigkeit von etwa 200 km / h; ein der Realität entsprechender Wert.

Erste Übungen

Als erste Übung bietet es sich an, die auf den Fallschirmspringer wirkenden Kräfte und die zugehörige Geschwindigkeit mit Pfeilen darzustellen.



Gewichtskraft rot Luftwiderstandskraft grün Geschwindigkeit blau

Aus den Skizzen wird klar, dass für die auf den Fallschirmspringer wirkende Gesamtkraft gilt:

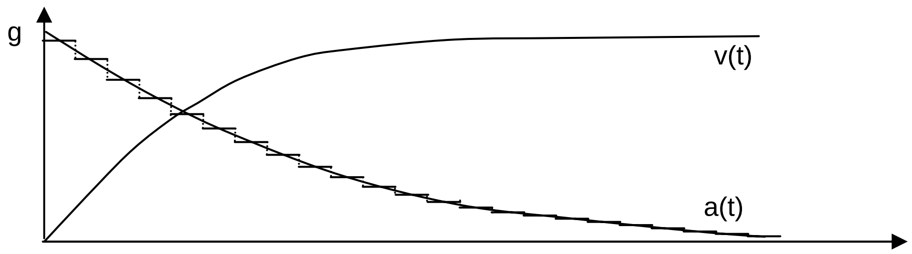
$$F = F_g - F_r = mg - k\,v^2.$$

Mithilfe des 2. newtonschen Gesetzes können die Schülerinnen und Schüler den Ausdruck für die Beschleunigung bestimmen:

$$a = g - \frac{k}{m} \cdot v^2 \text{ mit } v(t=0)=0 \text{ und } a(t=0)=g$$

Dabei ist die beschleunigende Kraft für große Zeiten praktisch 0, da die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers sich nicht mehr ändert. Entsprechend gilt für große Zeiten $F_g = F_r$, zum Zeitpunkt t = 0 ist $F = F_g$.

In einem qualitativen Diagramm kann dann das t-a bzw. das t-v-Diagramm skizziert werden (dass die Beschleunigung bei t = 0 zunächst quadratisch abnimmt, muss nicht berücksichtigt werden).



Die Bestimmung der Geschwindigkeitsfunktion v(t)

Zwar ist die Beschleunigung nun keine Konstante mehr, doch ändern sich Geschwindigkeit und Beschleunigung nicht sprunghaft. Für sehr kurze Zeiträume kann also die Kurve, die qualitativ bereits das richtige Beschleunigungsverhalten wiedergibt, durch Bereiche konstanter Beschleunigungen angenähert werden, wenn man nur die Zeitintervalle klein genug wählt (Stufen im Diagramm). Im Verlauf eines solchen Intervalls ändert sich die Geschwindigkeit gemäß der Beschleunigungsdefinition:

(Ia) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ bzw. $v_{neu} - v_{alt} = a \cdot \Delta t$ bzw. $v_{neu} = a \cdot \Delta t + v_{alt} = \left(g - \frac{k}{m} \cdot v_{alt}^2\right) \cdot \Delta t + v_{alt}$

bzw. aus den Bewegungsfunktionen für eine konstante Beschleunigung:

(Ib) $v(t) = a \cdot t + v_0$ bzw. $v(t + \Delta t) = v_{neu} = a \cdot (t + \Delta t) + v_0 = a \cdot \Delta t + v_{alt} = \left(g - \frac{k}{m} \cdot v_{alt}^2\right) \cdot \Delta t + v_{alt}$

Zur Berechnung der Geschwindigkeiten aus den „alten“ Werten ist es offensichtlich unerheblich, ob von der Beschleunigungsdefinition oder der Bewegungsfunktion ausgegangen wird.

Mit den Gleichungen (Ia) bzw. (Ib) hat man nun die Möglichkeit, aus dem bekannten Geschwindigkeitswert zum Zeitpunkt t die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t + Δt zu bestimmen, was am sinnvollsten in einer Tabelle geschieht und die zunächst mithilfe des Taschenrechners vollzogen werden kann. Wählt man den Startwert $v_0 = 0$, führt dies zur folgenden Tabelle

Schritt	**Zeit / s**	**Beschleunigung a / m s^{-2}**	**Geschwindigkeit v / m s^{-1}**
0	0	10,00	0
1	0,50	9,92	5,00
2	1,00	9,67	9,96
3	1,50	9,27	14,80
4	2,00	8,74	19,44
5	2,50	8,11	23,81
6	3,00	7,41	27,87
7	3,50	6,68	31,56
8	4,00	5,94	34,90
9	4,50	5,22	37,87

m = 90 kg, k = 0,3 kg m^{-1}, Δt = 0,5 s, g = 10,00 m s^{-2}

Die Bestimmung der Ortsfunktion x(t)

Völlig analoge Betrachtungen führen zum zurückgelegten Weg. Innerhalb eines sehr kurzen Zeitintervalls ändert sich die Geschwindigkeit nur geringfügig, sodass sich aus der Definition für die Geschwindigkeit der folgende Ausdruck ergibt.

(IIa) $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ bzw. $x_{neu} - x_{alt} = v \cdot \Delta t$ bzw. $x_{neu} = v \cdot \Delta t + x_{alt}$

bzw. aus den Bewegungsfunktionen

(IIb) $x(t) = x_{alt} = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$ bzw. $x(t+\Delta t) = x_{neu} = \frac{a}{2} \cdot (t+\Delta t)^2 + v_0 \cdot (t+\Delta t) + x_0 = \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2 + v_{alt} \cdot \Delta t + x_{alt}$

Während bei Gleichung (IIa) keine Aussage darüber gemacht wird, welches v zu verwenden ist, hat man bei Gleichung (IIb) einen quadratischen Term mit zu berücksichtigen. Da letztendlich alles in einem Tabellenkalkulationsprogramm errechnet werden soll, bei dem die Schrittweite Δt beliebig klein gemacht werden kann, wird durch Gleichung (IIb) plausibel, dass bei Geschwindigkeiten $v_{alt} > 0$ der Term $\frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2$ gegenüber dem Term $v_{alt} \cdot \Delta t$ vernachlässigt werden kann.

Ebenso kann man wenige Schritte zur Berechnung der Orte durchführen, wobei einmal zur Berechnung v_{alt} und einmal v_{neu} zugrunde gelegt wird. Wählt man Δt = 0,01 s erhält man die folgende Tabelle, die bereits nahelegt, dass der Ortsfehler dann maximal 1 mm beträgt.

Schritt	**t / s**	**a / m s^{-2}**	**v / m s^{-1}**	$\overline{x}$ **/ mm (Rechn. m. v_{neu})**	$\underline{x}$ **/ mm (Rechn. m. v_{alt})**
0	0	10,00	0,	0	0
1	0,01	9,99997	0,1000000	1,000000	0
2	0,02	9,99984	0,1999997	1,999997	1,000000

Tatsächlich gilt stets $\overline{x} - \underline{x} = (v_{neu} - v_{alt}) \cdot \Delta t \leq g \cdot (\Delta t)^2$ = 1 mm, da die Beschleunigung nie größer als die Erdbeschleunigung ist. Für ausreichend kleines Δt ist es demnach legitim zu schreiben

$$\text{(II)} \quad x_{neu} = v_{alt} \cdot \Delta t + x_{alt}$$

Selbstverständlich ist es möglich, die ursprüngliche Form der Gleichungen (IIa) bzw. (IIb) beizubehalten, was zu etwas geringeren numerischen Fehlern führt.

Bei Gleichung (IIa) liegt es dann nahe den Mittelwert für die Geschwindigkeit zu wählen, was zum sogenannten Halbschrittverfahren bei der Tabellenkalkulation führt. Gleichung (IIb) kann direkt so übernommen und in eine Tabellenkalkulation eingearbeitet werden, allerdings ist bei der Berechnung der quadratische Term zu berücksichtigen.

Beide Verfahren sind etwas anspruchsvoller und sperriger als das hier vorgestellte, sodass die Gefahr besteht, dass die Schülerinnen und Schüler zu einem erheblichen Teil mit der Bewältigung von Computerproblemen beschäftigt sind. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle empfohlen die mit einem größeren numerischen Fehler behaftete Gleichung (II) zu verwenden.

Wenn die Gleichungen (Ia) bzw. (Ib) und (II) verstanden sind, können die Schülerinnen und Schüler die Bewegung des Fallschirmspringers in einer Tabellenkalkulation modellieren und bei einer Schrittweite (z. B. 0,1 s) Ort und Geschwindigkeit bestimmen.

In der wissenschaftlich-technischen Praxis sind Simulationsrechnungen von allergrößter Bedeutung. Die Schülerinnen und Schüler sollen deshalb an dieser Stelle ein einfaches numerisches Verfahren kennenlernen und dabei Sein und Ziel einer Simulationsrechnung durchschauen.

Realisierung in Tabellenkalkulationsprogrammen

Das Programm Vivitab (einen freien Download findet man auf der Homepage des Gymnasiums Berchtesgaden http://www.gymbgd.de/) ist für die physikalische Modellrechnung besonders geeignet; es wurde extra zu diesem Zweck erstellt und weist deshalb gegenüber anderen Tabellenkalkulationsprogrammen bei dieser Art der Verwendung einige Vorteile auf. Es benötigt nämlich lediglich eine Syntaxvereinbarung, die auf die Vorgängerzelle verweist:

$v_{neu} = v_{alt} + a \cdot \Delta t$ wird syntaktisch zu $= \# v + a \cdot \Delta t$

Fall mit Reibung.par (schreibgeschützt)

Status : Bogenmaß

Konstanten: dt = 0,05; m = 0,5; g = 9,81; R = 2,5;

Funktionen:

Wert:

z	t	a	v	x	s
100	#t + dt	(m*g - R*#v^	#v+a*dt	#x+#v*dt	#s+#v*dt+0.5
1	0		0	0	0
2	0,05	9,81	0,4905	0	0,0122625
3	0,1	8,60704875	0,920852437	0,024525	0,047546310
4	0,15	5,570153941	1,199360134	0,070567621	0,100551625
5	0,2	2,617676337	1,330243951	0,130535628	0,163791727
6	0,25	0,962255147	1,378356708	0,197047826	0,231506743
7	0,3	0,310663915	1,393889904	0,265965661	0,300812909

Das Modell des Falls mit Reibung erhält man einfach durch die Hinzufügung der Reibungskraft zur Gewichtskraft. In Vivitab kann man dazu sehr einfach durch Nennung eines Namens in den Konstantenvereinbarungen eine globale Variable, hier R genannt, festlegen.

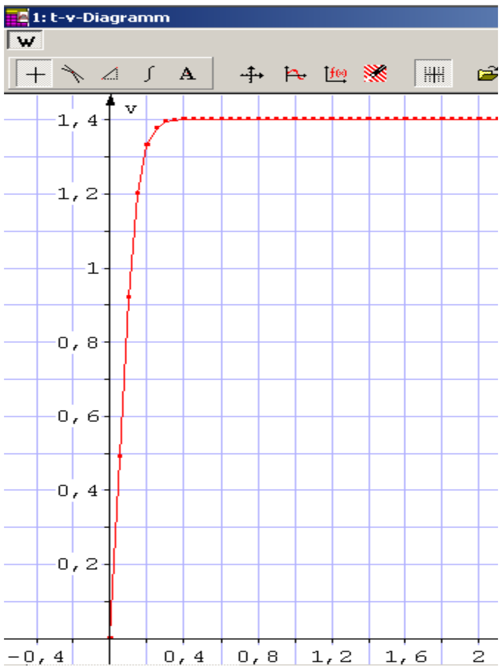
$a = (F_g - R \cdot \# v \,\hat{}\, 2) / m$

Das t-v-Diagramm zeigt die numerisch genäherte Funktion v(t). Zur Erprobung eignet sich die rechnerische Bestimmung von v nach dem Ende der Beschleunigungsphase im Kräftegleichgewicht.

Es gilt dann in bester Übereinstimmung mit dem Simulationsergebnis

$mg = R \cdot v^2$

$$v = \sqrt{\frac{mg}{R}} = \sqrt{\frac{0{,}5\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{2{,}5\,\frac{kg}{m}}} = 1{,}4\,m\,s^{-1}$$

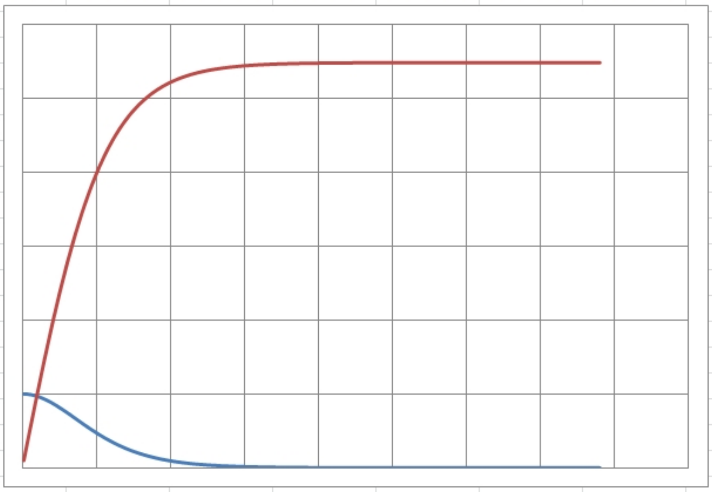


Modell-Editor

```
z = 100
t = #t + dt; t(1)=0
a = (m*g - R*#v^2)/m
v = #v+a*dt; v(1)=0
x = #x+#v*dt; x(1)=0
s = #s+#v*dt+0.5*a*dt^2; s(1)=0
```

Die Schülerinnen und Schüler haben in der Regel Erfahrung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (i. d. R. Excel oder open-office-Produkte), sodass man auf dieses Wissen aufbauen kann. Aus diesem Grund kann es zeitsparend und sinnvoll sein, mit diesen Tabellenkalkulationsprogrammen zu arbeiten, sofern die Schülerinnen und Schüler entsprechende Vorkenntnisse besitzen.

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4	a=	(mg-kv²)/m		
5	m=	90		
6	g=	10		
7	k=	0,3		
8	dt=	0,1		
9				
10				
11	t	a	v	x
12				
13	0,0000	10,0000	0,0000	0,0000
14	0,1000	9,9967	1,0000	0,0000
15	0,2000	9,9867	1,9997	0,1000
16	0,3000	9,9700	2,9983	0,3000
17	0,4000	9,9468	3,9953	0,5998
18	0,5000	9,9170	4,9900	0,9993
19	0,6000	9,8807	5,9817	1,4983
20	0,7000	9,8381	6,9698	2,0965
21	0,8000	9,7891	7,9536	2,7935
22	0,9000	9,7340	8,9325	3,5888
23	1,0000	9,6729	9,9059	4,4821
24	1,1000	9,6059	10,8732	5,4727
25	1,2000	9,5332	11,8338	6,5600



Im Unterricht können bei Bedarf noch weitere Fälle von Bewegungen mit nicht konstanter Kraft oder nicht konstanter Masse besprochen werden, z. B.

- Bewegung von Körpern bei Reibung durch laminare Umströmung $F_r = k \cdot v$ (langsam fallende Kugel in einer Flüssigkeit)
- Körper mit variabler Masse (Raketengleichung mit und ohne Luftreibung, mit und ohne höhenabhängig Luftdichte) $a = \frac{F_{ges}}{m_{start} - \lambda \cdot t}$

Die Behandlung dieser Bewegungen kann in Form von Schülerreferaten erfolgen. Durch Variation der Parameter können die Schülerinnen und Schüler anhand der entstehenden t-x-Diagramme und t-v-Diagramme diskutieren, wie sich Änderungen von Parametern auf die Bewegung auswirken.

Weitere Verwendung der Methode der kleinen Schritte

Die Methode der kleinen Schritte kann äußerst gewinnbringend bei den mechanischen Schwingungen eingesetzt werden. Setzt man für das Kraftgesetz durch F = - Dx und entsprechend die Zeile für die Beschleunigung durch $a = -\frac{D}{m}x$, so ergibt sich die Simulationsrechnung einer harmonischen Schwingung in völlig analoger Weise. Weitere Ausführungen dazu finden sich beim Link-Ebenen-Beitrag zu den Schwingungen.