



Lehrplananbindung: 10.2 Die Mechanik Newtons – die Methode der kleinen Schritte

Kompetenzen: Neben den Fachkenntnissen liegt der Schwerpunkt bei

|                            |   |   |   |
|----------------------------|---|---|---|
| <b>Erkenntnisgewinnung</b> | <i>Fachmethoden wiedergeben</i>                     | <b>Fachmethoden nutzen</b>                                | <b>Fachmethoden problembezogen auswählen u. anwenden</b>  |
| <b>Kommunikation</b>       | <b>Mit vorgegebenen Darstellungsformen arbeiten</b> | <i>Geeignete Darstellungsformen nutzen</i>                | <i>Darstellungsformen selbständig auswählen u. nutzen</i> |
| <b>Bewertung</b>           | <i>Vorgegebene Bewertungen nachvollziehen</i>       | <i>Vorgegebene Bewertungen beurteilen u. kommentieren</i> | <i>Eigene Bewertungen vornehmen</i>                       |

### Aufgabenbeispiel: Startphase der Saturn V-Rakete

Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mit ihrer Hilfe konnten in den Jahren 1969 – 72 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. Die Saturn V hatte die Startmasse  $m_0 = 2,9 \cdot 10^6$  kg. Innerhalb von 160 s wurden nach dem Start  $2,24 \cdot 10^6$  kg Treibstoff gleichmäßig verbrannt, wobei die Triebwerke während dieser Zeit zusammen die durchschnittliche Schubkraft  $F = 34$  MN aufbrachten.

- a) Berechnen Sie die Beschleunigung der Rakete beim Start und bei Brennschluss, also nach 160 s. Berücksichtigen Sie dabei die Erdbeschleunigung, die während der betrachteten Flugphase den konstanten Wert  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$  hat.

$$[\text{zur Kontrolle } a_{\text{Start}} = 1,9 \text{ m s}^{-2}, a_{\text{Brennschl.}} = 41,7 \text{ m s}^{-2}]$$

- b) Schätzen Sie mithilfe der Bewegungsfunktionen die Geschwindigkeit der Rakete bei Brennschluss und sowie die erreichte Höhe ab. Ziehen Sie dazu einen Mittelwert für die Beschleunigung heran.

Tatsächlich war die Saturn V nach 160 s noch erheblich langsamer und „erst“ in einer Höhe von 56 km (sie flog nicht senkrecht nach oben).

- c) Diskutieren Sie, warum Ihre Abschätzung unbefriedigende Werte liefert. Begründen Sie, wie es sein kann, dass der vernachlässigte Luftwiderstand dafür trotz der extremen Geschwindigkeiten nicht in erster Linie verantwortlich ist. Berechnen Sie dazu den Beschleunigungswert für  $t = 80$  s und vergleichen Sie diesen mit Ihrem Mittelwert.

Deutlich bessere Ergebnisse erhält man mit der Methode der kleinen Schritte.

- d) Begründen Sie, dass die Masse der Rakete gemäß der Funktion  $m(t) = m_0 - k \cdot t$  mit  $k = 1,4 \cdot 10^4 \text{ kg s}^{-1}$  gut beschrieben werden kann und demzufolge die Beschleunigung gemäß  $a(t) = \frac{F}{m(t)}$  zunimmt.

- e) Erstellen Sie eine Tabelle nach folgendem Muster und bestimmen Sie mithilfe eines geeigneten Tabellenkalkulationsprogramms die nach 160 s erreichbare Geschwindigkeit und Höhe. Vergleichen Sie diese mit den von Ihnen in Teilaufgabe b) berechneten Werten.

| t/s | m / $10^6$ kg | a / $\text{m s}^{-2}$ | v / $\text{m s}^{-1}$ | x / m |
|-----|---------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| 0   | 2,900         | 1,924                 | 0                     | 0     |
| 1   | 2,886         | 1,981                 | 1,924                 | 0     |
| 2   |               |                       |                       |       |

Lösung:

$$a) \quad a_{\text{Start}} = \frac{F}{m_0} - g = 1,9 \text{ m s}^{-2}$$

$$a_{\text{Brennschl.}} = \frac{F}{m_0 - m_{\text{Treibst}}} - g = 42 \text{ m s}^{-2}$$

$$b) \quad \bar{a} = \frac{1}{2}(a_{\text{Start}} + a_{\text{Brennschl.}}) = 22 \text{ m s}^{-2}$$

$$v = \bar{a} \cdot t = 35 \text{ km s}^{-1}$$

$$h = \frac{\bar{a}}{2} t^2 = 282 \text{ km}$$

- c) Die Luftwiderstandskraft ist zu jedem Zeitpunkt deutlich kleiner als die Schubkraft durch die Triebwerke, da die sehr hohen Geschwindigkeiten erst in großer Höhe in sehr dünner Luft erreicht werden. Der Hauptgrund für die mangelhafte Abschätzung ist der zu hohe Schätzwert für die durchschnittliche Beschleunigung. Bei  $t = 80 \text{ s}$  ist die Beschleunigung

$$a = \frac{F}{m_0 - m_{\text{Treibst}} / 2} - g = 9,3 \text{ m s}^{-2}, \text{ also erheblich geringer als } \bar{a}.$$

- d) Wenn der Treibstoff gleichmäßig verbrannt wird, wird jede Sekunde  $\Delta m = 2,24 \cdot 10^6 \text{ kg} / 160 = 1,4 \cdot 10^4 \text{ kg}$  Treibstoff verbraucht. Die angegebene Funktion liefert genau diesen Zusammenhang.

- e) Die Methode der kleinen Schritte liefert unter der Annahme, dass die Rakete senkrecht steigt eine Geschwindigkeit  $v_{\text{Brennschl}} = 2,0 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$  und die Höhe  $h = 92 \text{ km}$ . Tatsächlich war die Saturn V aufgrund des schrägen Flugs bei Brennschluss nicht so hoch ( $h = 56 \text{ km}$ ), dafür jedoch etwas schneller ( $v_{\text{Brennschl}} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$ ).