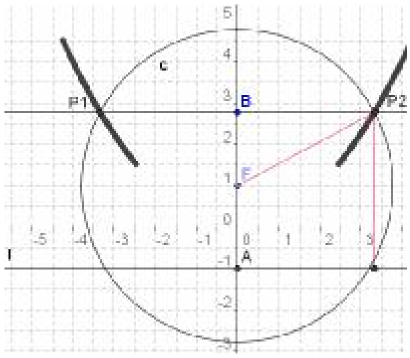
M 9.5.1 Die Satzgruppe des Pythagoras – Parabel aus geometrischer Sicht

Die folgende Zeichnung beschreibt eine Parabelkonstruktion mit Hilfe von GeoGebra, die auf folgender Abstandseigenschaft basiert: Jeder Parabelpunkt P ist vom Brennpunkt F und der Leitlinie l gleich weit entfernt. Die beiden roten Hilfsstrecken in der Zeichnung verdeutlichen diese Eigenschaft.

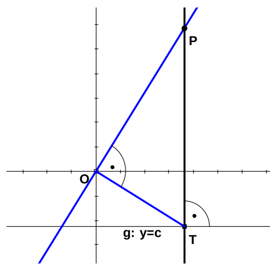
Ausgehend vom Brennpunkt F und der Leitlinie l wird das Lot von F auf die Leitlinie l konstruiert; Lotfußpunkt ist der Punkt A. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Ursprung im Mittelpunkt der Strecke [AF] liegt und die x-Achse parallel zur Leitlinie l ist. Damit ergeben sich für die Punkte F und A die Koordinaten F(0 / f) und A(0 / –f). Zur Konstruktion von Parabelpunkten, d. h. von Punkten, deren Abstand vom Brennpunkt F so groß ist wie von der Leitlinie l, wird zunächst auf der y-Achse ein „Gleiter“ B erzeugt. Dem Kreis um F wird als Radius der Wert „Abstand[B, l]“ zugewiesen. Die Parallele zu l durch B schneidet den Kreis um F in den Punkten P1 und P2. Variiert man den Abstand von B zur Leitlinie l und zeichnet die Spuren von P1 und P2 auf, so erhält man eine Parabel.



Für die Koordinaten x und y jedes entstandenen Punkts P(x / y) gilt nach dem Satz des Pythagoras: $\overline{PF}^2 = (y - f)^2 + x^2$; mit $\overline{PF} = y + f$ folgt $(y + f)^2 = (y - f)^2 + x^2$ und damit $y = \frac{1}{4f} x^2$.

Eine weitere Möglichkeit zur Parabelkonstruktion lässt sich z. B. über den Höhensatz begründen. Dies kann im Rahmen der folgenden Beispielaufgabe schrittweise erarbeitet werden:

Ein beliebiger Punkt T der Geraden g mit der Gleichung y = c (c < 0) wird mit dem Ursprung O verbunden. P ist der Schnittpunkt der Senkrechten zu g durch T und der Senkrechten zu TO durch O.



a) Zunächst ist c = –1. Zeichne mit dynamischer Geometriesoftware die Gerade g und wähle einen Punkt T auf g, der auf g frei bewegt werden kann. Konstruiere den Punkt P wie oben beschrieben. Zeichne nun die Spur des Punktes P auf, wenn T längs g bewegt wird.

b) Begründe, dass die Spur des Punktes P auf einer Parabel liegt. (Hinweis: Höhensatz)

c) Wähle für c mindestens noch zwei weitere Werte (kleiner null) und erzeuge jeweils die zugehörigen Parabeln. Welcher Zusammenhang besteht zwischen c und dem Parameter a der zugehörigen Parabelgleichung $y = ax^2$?

d) Welche Figur entsteht bei der oben beschriebenen Konstruktion, wenn für c eine positive Zahl gewählt wird?